تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

١) أ) أ = ٣٥، أر = −١٤، فيكون ر = $\frac{١٤}{٣٥} = \frac{٢}{٥}$

الحدّ النوني = أر^{ن} − ١

فيكون الحدّ الرابع = ٣٥ × $\left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٣} = -\frac{٥٦}{٢٥}$

ب) جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$، جـ$_{\infty}$ = $\frac{٣٥}{١-\left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٢}}$ = ٢٥

٢) أ) الحدود الثلاثة الأولى هي ٢ك + ٦، ك + ١٢، ك في المتتالية الهندسية، ناتج قسمة الحدّ على الحد السابق له يساوي أساس المتتالية.

ر = $\frac{ك + ١٢}{٢ك + ٦}$ و ر = $\frac{ك}{ك + ١٢}$ فيكون

$\frac{ك + ١٢}{٢ك + ٦} = \frac{ك}{ك + ١٢}$

اضرب تبادليًّا لتحصل على:

(ك + ١٢)^{٢} = ك (٢ك + ٦)

فكّ الأقواس لتجد أن:

ك^{٢} + ٢٤ك + ١٤٤ = ٢ك^{٢} + ٦ك

٠ = ك^{٢} − ١٨ك − ١٤٤

(ك − ٢٤)(ك + ٦) = ٠

ك = ٢٤ ، ك = − ٦، معطى حدود المتتالية موجبة، لذا ك = ٢٤

ب) أول ثلاثة حدود هي ٥٤، ٣٦، ٢٤، أ = ٥٤، ر = $\frac{٢}{٣}$

جـ$_{\infty}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$، جـ$_{\infty}$ = $\frac{٥٤}{١ - \frac{٢}{٣}}$ = ١٦٢

٣) أ) مجموع المتتالية الحسابية =

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

فيكون: مجموع أول ١٠٠ حدّ هو

جـ$_{١٠٠}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$[٢أ + ٩٩د] مجموع أول ٢٠ حدًّا هو جـ$_{١٠٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$[٢أ + ١٩د]

معطى أن جـ$_{١٠٠}$ = جـ$_{٢٠}$

٥٠[٢أ + ٩٩د] = [٢أ + ١٩د]

اقسم على ٥٠ وفكّ الأقواس لتجد أن:

٢أ + ٩٩د = ١٠أ + ٩٥د

٤د = ٨أ

د = ٢أ

ب) الحد النوني = أ + (ن − ١)د

ح$_{٥٠}$ = أ + ٤٩ د، لكن د = ٢أ،

فيكون ح$_{٥٠}$ = أ + ٩٨أ = ٩٩أ

٤) أ) أ = ٣٨، د = −٢,٥

ن = ٢٥

الحدّ النوني = أ + (ن −١) د، و

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[٢أ + (ن − ١)د]

أ + ١٤د = ٣، جـ$_{٨}$ = $\frac{٨}{٢}$[٢أ + ٧د] = ٢٤٣

من المعادلة الأولى أ = ٣ − ١٤د عوّض عن أ في المعادلة الثانية وبسّط لتحصل على:

٤[٢(٣ − ١٤د) + ٧د] = ٢٣٤

٤(٦ − ٢٨د + ٧د) = ٢٣٤

٢٤ − ٨٤د = ٢٣٤

د = −٢,٥

وعليه فإن أ = ٣ − ١٤ (−٢,٥) = ٣٨

ب) الحدّ النوني = أ + (ن −١) د وهو يساوي −٢٢

٣٨ + (ن − ١) (−٢,٥) = −٢٢

ن = ٢٥

٥) أ$_{ر}$= −٥٧٦، أ$_{ر^{٤}}$ = ٢٤٣

أ) اقسم المعادلة الثانية على المعادلة الأولى لتحصل على: ر^{٢} = − $\frac{٢٧}{٦٤}$

ر= − $\frac{٣}{٤}$

ب) عوّض عن ر = $\frac{٣}{٤}$ في المعادلة أ ر = −٥٧٦ لتجد أن أ = ٧٦٨

ج) $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$، وعليه، فإن

$$جـ_{\infty} = \frac{٧٦٨}{١ - \left(-\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{٣٠٧٢}{٧}$$

٦) أ) الحدّ النوني = أ + (ن − ١) د،

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$$

$$أ + ٥د = ٣٥، \text{ و } جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}[٢أ + ٩د] = ٣٣٥$$

فيكون، $٢أ + ١٠د = ٧٠$، $٢أ + ٩د = ٦٧$

اطرح المعادلتَين لتجد أن د = ٣، ثم عوّض عن د لتجد أن أ = ٢٠

$ح_{٨}$ (الحدّ الثامن) = ٢٠ + ٧(٣) = ٤١

ب) مجموع المتتالية الأولى إلى مالانهاية

$$جـ_{\infty} = \frac{٨}{١ - ر}$$

مجموع المتتالية الثانية إلى مالانهاية

$$جـ_{\infty} = \frac{١٠}{١ - \frac{١}{٤}ر}$$

$$\frac{٨}{١ - ر} = \frac{١٠}{١ - \frac{١}{٤}ر}$$

$$(١ - \frac{١}{٤}ر) = ١٠(١ - ر)$$

$$٨ - ٢ر = ١٠ - ١٠ر$$

$$٨ر = ٢$$

$$ر = \frac{١}{٤}$$

عوّض بدل ر = $\frac{١}{٤}$ في المعادلة جـ = $\frac{٨}{١ - ر}$

لتحصل على: جـ = $\frac{٣٢}{٣}$

٧) الحدّ النوني = أ + (ن − ١) د،

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$$

$ح_{١٠}$ = أ + ٩د = ٤، $جـ_{٧} = \frac{٧}{٢}[٢أ + ٦د] = -٢٨$

بسّط المعادلة الثانية لتحصل على: أ + ٣د = −٤

اطرح المعادلة الناتجة من المعادلة الأولى فتحصل على ٦د = ٨، أي د = $\frac{٧}{٣}$، عوّض بدل د لتجد أن أ = −٨

ب) أ = ٤٠ ، $أ ر^{٣} = ٥$

هذا يعني أن $ر^{٣} = \frac{١}{٨}$، و من ثم ر = $\frac{١}{٢}$

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٤٠}{١ - \frac{١}{٢}} = ٨٠$$

٨) أ) $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ ، $٤جـ = \frac{أ٣}{١ - ٢ر}$

$$٤\frac{أ}{١ - ر} = \frac{أ٣}{١ - ٢ر}$$

اقسم طرفَي المعادلة على أ ن ثم اضرب تبادليًا لتحصل على:

$$٤(١ - ٢ر) = ٣(١ - ر)$$

$$٤ - ٨ر = ٣ - ٣ر$$

$$١ = ٥ر$$

$$ر = \frac{١}{٥}$$

ب) الحدّ العام = أ + (ن − ١)د ٦

أ = −٢٤، $-٢٤ + (ن - ١)د = ١٣,٨$،

و $-٢٤ + (٢ن - ١)د = -٣$

فيكون (ن − ١)د = ١٠,٢ ، و (٢ ن − ١)د = ٢١

اقسم المعادلة الأولى على الثانية لتحصل على:

اختصر د ثم اضرب تبادليًّا لتحصل على:

$$٢١(ن - ١) = ١٠,٢(٢ن - ١)$$

$$٢١ن - ٢١ = ٢٠,٤ن - ١٠,٢$$

$$٠,٦ ن = ١٠,٨$$

ن = ١٨

٩) أ) بدأ الارتفاع ١٠ م، بعد الارتطام الأول يكون

الحدّ الأول ١٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٨، والحدّ الثاني = ٨ × $\frac{٤}{٥}$

وهكذا تشكل هذه الارتفاعات متتالية هندسية

حيث أ = ١٠ × $\frac{٤}{٥}$ ، ر = $\frac{٤}{٥}$

الحدّ العام ١٠ × $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{ن}$

ب $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

ولأن الكرة ترتفع إلى أقصى ارتفاع ثم تسقط إلى الأرض في المسافة نفسها، لذا علينا مضاعفة الإجابة.

$جـ_٥ = \frac{١٠(١ - (٠,٨)^٥)}{٠,٨ - ١} = \frac{٤٢٠٢}{١٢٥}$

ضعف الإجابة = ٦٧,٢٣٢ مترًا.

١٠) الأسهل استخدام وحدة الثواني لقياس الزمن.

٤ دقائق = ٤ × ٦٠ = ٢٤٠ ثانية

تُمثل الحدود متتالية هندسية حيث أ = ٢٤٠، والأساس ر= ١,٠٥

استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$، لأن ر > ١

فيكون $جـ_{١٠} = \frac{٢٤٠(١,٠٥^{١٠} - ١)}{١,٠٥ - ١} = ٣٠١٨,٦٩٤٢٠٩$ ثانية.

الإجابة إلى أقرب ثانية ٣٠١٩ إلى أقرب ثانية. اقسم على ٦٠ لتحصل على ٥٠ دقيقة و١٩ ثانية.

١١) الحدّ الأول أ = ١,٧٥ ، والحد الثاني أ + د = ١,٥،

فيكون د = −٠,٢٥

استخدم الصيغة $جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$، لتجد أن

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ \times ١,٧٥ + (ن - ١)(-٠,٢٥)د] = -ن$

فكّ الأقواس ثم بسّط لتحصل على:

$٣,٥ - ٠,١٢٥ ن + ٠,٢٥ = -٢$

$٥,٧٥ = ٠,٢٥ ن$

فتكون ن = ٢٣

١٢) الحد الثاني أ ر = −١٤٥٨ ، و أ ر^{٤} = ٤٣٢

أ اقسم المعادلة الثانية على الأولى لتحصل على:

$ر^{٣} = \frac{٤٣٢}{١٤٥٨} - = \frac{٨}{٢٧} -$

فيكون $ر = -\frac{٢}{٣}$

ب عوّض بدل ر في أ ر = −١٤٥٨ لتحصل على

أ = ٢١٨٧

ج $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ فيكون $جـ_{\infty} = \frac{٢١٨٧}{\frac{٢}{٣} - ١} = \frac{٦٥٦١}{٥}$

١٣) أ مجموع المتتالية الهندسية =

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)د]$

فيكون: مجموع أول ١٠٠ حدّ هو

$جـ_{١٠٠} = \frac{١٠٠}{٢}[٢أ + ٩٩د]$ مجموع أول ٢٠ حدًّا هو $جـ_{١٠٠} = \frac{٢٠}{٢}[٢أ + ١٩د]$

معطى أن $جـ_{١٠٠} = جـ_{٢٠}$

$٥٠[٢أ + ٩٩د] = [٢أ + ١٩د]$

اقسم على ٥٠ وفكّ الأقواس لتجد أن:

٢أ + ٩٩د = ١٠أ + ٩٥د

٤د = ٨أ

د = ٢أ

ب الحد النوني = أ + (ن − ١)د

$ح_{٥٠}$ = أ + ٤٩ د، لكن د = ٢أ،

فيكون $ح_{٥٠}$ = أ + ٩٨أ = ٩٩أ

١٤) أ الأساس د = ١٢، الأساس هو الفرق بين الحدّ الأول والحدّ الثاني، فيكون $س^{٢}$ − ٤ س = ١٢

$س^{٢} - ٤ س - ١٢ = ٠$

(س − ٦) (س + ٢) = ٠

س = ٦ ، أو س = −٢

عندما س = ٦ تكون المتتالية ٢٤، ٣٦، ٤٨؛ الحدّ الثالث = ٤٨

عندما س = −٢ تكون المتتالية −٨، ٤، ١٦؛ الحدّ الثالث = ١٦

ب الحدّ الأول أ = ٤ س، الحدّ الثاني أ ر = $س^{٢}$

عوّض بدل أ في المعادلة الثانية لتحصل على:

٤س ر = $س^{٢}$، $ر = \frac{١}{٤}س$

مجموع المتتالية إلى مالانهاية ٨، فيكون

$$\text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{٤س}}{\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}} = \text{٨}$$

$$\text{٤س} = \text{٨}\left(\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right)$$

$$\text{٤ س} = \text{٨} - \text{٢س}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

فيكون الحدّ الثالث

$$\text{أ ر}^{\text{٣}} = \text{٤س} \times \left(\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}^{\text{٣}} = \frac{\text{١٦}}{\text{٢٧}}$$

١٥) المتتالية الهندسية للمسافة الرأسية التي تخطتها الكرة أ = ٤ وأساسها ر

مجموع المتتالية إلى ما لانهاية يساوي ٢٤

$$\text{٢٤} = \frac{\text{أ}}{\text{١} - \text{ر}}$$

$$\text{٢٤} = \frac{\text{٤}}{\text{١} - \text{ر}}$$

$$\text{١} - \text{ر} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}}$$

يتناقص ارتفاع الكرة الرأسي ١ − $\frac{\text{٥}}{\text{٦}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٦}}$ بعد كل ارتداد

١٦) المتتالية الحسابية لمدخرات مريم أ = ١٠٠٠

و د = ٥٠

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\left[\text{٢أ} + (\text{ن} - \text{١})\text{د}\right]$$

$$\text{١٦٩٠٠} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\left[\text{٢٠٠٠} + (\text{ن} - \text{١})\,\text{٥٠}\right]$$

$$\text{٣٣٨٠٠} = \text{٢٠٠٠ن} + \text{٥٠ن}^{\text{٢}} - \text{٥٠ن}$$

$$\text{٥٠ن}^{\text{٢}} + \text{١٩٥ن} - \text{٣٣٨٠٠} = \text{٠}$$

$$\text{ن}^{\text{٢}} + \text{٣٩ن} - \text{٦٧٦} = \text{٠}$$

$$(\text{ن} - \text{١٣})(\text{ن} + \text{٥٢}) = \text{٠}$$

ن = ١٣

تحتاج مريم إلى ١٣ شهرًا لتوفير ١٦٩٠٠ ريال عُماني.